



## Konwekcja naturalna w modelowym pomieszczeniu z zastosowaniem aproksymacji Bussinesq'a

WERONIKA RADZIKOWSKA-JUŚ, STEFAN OWCZAREK

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,  
00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2, weronika.radzikowska-jus@wat.edu.pl

**Streszczenie.** Artykuł przedstawia analizę numeryczną przepływu ciepła w czasie w modelowym pomieszczeniu w wyniku umieszczenia w nim obiektu o podwyższonej temperaturze. W wyniku różnicy temperatur pomiędzy obiektem a otoczeniem w pomieszczeniu następuje zjawisko konwekcji naturalnej. Obliczenia wykonywano z wykorzystaniem oprogramowania ELMER bazującego na metodzie elementów skończonych. W celu zmniejszenia ich złożoności w symulacji wykorzystano aproksymację Bussinesq'a. Rozpatrywany przypadek jest zbliżony do konwekcji Rayleigha-Benarda, która stanowi punkt wyjścia dla przeprowadzonej analizy.

**Słowa kluczowe:** rozkład temperatury w modelowym pomieszczeniu, konwekcja Rayleigha-Benarda, aproksymacja Bussinesq'a

**DOI:** 10.5604/01.3001.0010.5392

### 1. Podstawy teoretyczne

#### 1.1. Konwekcja Rayleigha-Benarda

##### 1.1.1. Definicja konwekcji swobodnej

Konwekcja naturalna (swobodna) jest jednym z podstawowych sposobów wymiany ciepła. Ruch płynu jest w jej przypadku zwykle wywołany siłami ciężkości działającymi na komórki/warstwy płynu o zróżnicowanej gęstości. Zróżnicowanie to jest spowodowane niejednorodnością temperatury w różnych miejscach płynu (na ogół wywołane przez obecność ciała wymieniającego ciepło z otoczeniem). Przebieg konwekcji naturalnej w zamkniętej komorze może być bardzo zróżnicowany

— w zależności od jej geometrii (w tym geometrii ciała wymieniającego ciepło) [14]. Jednak w ogólności proces ten przebiega w opisany poniżej sposób.

Jeżeli w jakimś miejscu w płynie nagrzejemy w jakiś sposób cząstki, to na skutek siły wyporu będą one przemieszczać się w kierunku przeciwnym do działania siły ciężkości. Na miejsce cząstek przemieszczonych napływają zimne cząstki. Jeżeli ustalony jest proces podgrzewania cząstek, zostaje wytworzony ruch płynu. Wyróżniamy konwekcję swobodną powstałą w trzech sytuacjach. Zimny płyn styka się z gorącą ścianą, następuje przepływ z dołu do góry. Gorący płyn styka się z zimną ścianą — przepływ do dołu. Zimny płyn przy zetknięciu się z poziomym gorącym wymiennikiem ciepła powoduje początkowo ruch do góry, najpierw laminarny, a następnie burzliwy. Siła wyporu jest wprowadzona do równania, jej wartość jest odniesiona do jednostki objętości płynu i wynosi [21]:

$$g(\rho_0 - \rho) = g\rho \frac{T - T_w}{\theta_\infty}, \quad (1)$$

gdzie:  $\rho_0$  — gęstość płynu w temperaturze  $T_\infty$  w dużej odległości od źródła powstawania konwekcji,  
 $\rho$  — gęstość płynu u źródła powstawania konwekcji swobodnej,  
 $g$  — przyspieszenie pola sił masowych, grawitacyjne,  
 $T, T_w, \theta_\infty$  — wartości temperatury w miejscu rozważanym, u źródła wymiany ciepła.

Zjawisko konwekcji jest opisywane jako rozprzestrzenianie temperatury oraz wielkości przemieszczeń ruchu cząstek powietrza. Do określenia konwekcji swobodnej służą równania ciągłości, ruchu oraz równanie energii. Pomijając szczegóły wyprowadzenia równań, przytoczono ich postać.

Równanie ciągłości ruchu płynu [21]:

$$\nabla(\rho \mathbf{w}) + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0, \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{w}$  wektor prędkości płynu elementarnej objętości  $dV$ .

Równanie energii przewodzenia ciepła w poruszającym się płynie [21]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + (\mathbf{w} \nabla) T = a \nabla^2 T, \quad (3)$$

$\mathbf{w} \nabla$  — iloczyn skalarny wektora przemieszczenia i operatora gradientu,  
 $a$  — współczynnik wyrównania temperatury

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]. \quad (4)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Operator różniczkowy zwany laplasjanem polega na wykonaniu dywergencji z gradientu funkcji skalarnej [21].

$$\nabla^2 = \text{div grad } \varphi. \quad (6)$$

Równanie ruchu poruszającej się elementarnej objętości płynu napisane równaniem wektorowym [21]:

$$\rho \mathbf{g} - \nabla \mathbf{p} + \eta \nabla^2 \mathbf{w} = \rho \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau} + (\rho \mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} \quad (7)$$

gdzie składniki równania mają wymiar siły odniesionej do jednostki objętości.

$\eta \left[ \frac{\text{N} \times \text{s}}{\text{m}^2} \right]$  — współczynnik lepkości dynamicznej, siła tarcia na jednostkę pola powierzchni.

Możliwe są różne przypadki, na przykład, jeżeli kierunek  $x$  jest pionowy, tj. zgodny z kierunkiem działania siły ciężkości, składowe przyspieszenia  $g_y = g_z = 0$ ,  $g_x = g$ .

Zamiast siły ciężkości  $\rho \mathbf{g}$  występuje w równaniu Naviera-Stokesa siła wyporu wyrażająca różnicę ciężarów właściwych  $g(\rho_0 - \rho)$  nagrzanych i zimnych cząstek cieczy.

### 1.1.2. Badania konwekcji wg Rayleigha-Benarda

Doświadczenia w zakresie konwekcji Henri Benard [1, 14] prowadził już w 1900 roku. Jego eksperyment polegał na obserwacji ruchu warstw cieczy (płynnego wiewiórybego tłuszczu) w wyniku podgrzewania od spodu jego cienkiej warstwy. Wynikiem eksperymentu były dość regularne komórki konwekcyjne. Aspekt teoretyczny eksperymentu Benarda (w szczególności uwzględniający niestabilność płynu wywołaną zróżnicowaniem gęstości) opisał w 1916 r. Rayleigh [2, 14, 16]. Model konwekcji został zdefiniowany w cienkiej dwuwymiarowej (bardzo długiej) warstwie płynu, który podgrzewano od spodu. Opisywana konwekcja jest znana jako konwekcja Rayleigha-Benarda. W swojej pracy Rayleigh zdefiniował także parametr, od którego wielkości zależy sposób przepływu płynu (laminarny lub turbulentny) — liczbę Rayleigha  $Ra$  [14]. Jest to bezwymiarowa liczba będąca iloczynem liczb Grashofa i Prandtla. Liczba Grashofa opisuje relacje pomiędzy wypornością i lepkością płynu [3], podczas gdy liczba Prandtla opisuje relacje pomiędzy lepkością płynu a jego przewodnictwem cieplnym [3]. Zależność na liczbę Rayleigha to [3]:

$$Ra = (g\beta\Delta TL^3 \rho) / \mu\alpha, \quad (8)$$

gdzie:  $g$  — przyspieszenie ziemskie;  
 $\beta$  — współczynnik objętościowej rozszerzalności cieplnej;  
 $\Delta T$  — różnica temperatur powierzchni oraz równowagi styku  
powierzchni z płynem;  
 $L$  — wymiar charakterystyczny;  
 $\rho$  — gęstość;  
 $\mu$  — lepkość kinematyczna;  
 $\alpha$  — termodyfuzja.

Gdy liczba Rayleigha jest mniejsza niż  $10^8$ , przepływ jest laminarny, zaś gdy jest większa niż  $10^{10}$ , podczas przepływu występują turbulencje [3].

W późniejszym czasie zagadnienie konwekcji Rayleigha-Benarda było szeroko badane i rozwijane (m.in. Jeffreys [4], Pellew [5], Dropkin [6], Sommerscales [7], Busse [8], Krishnamurti [9], Bejan [10], Drazin i Reid [11]) i nadal jest chętnie podejmowane. Od pojawienia się takich możliwości prowadzone są również symulacje tego zjawiska — jako pierwszy zagadnienie to podjął Dearthoff [12, 14].

Ze względu na dostępny szeroki i dokładny opis zjawiska podjęto zagadnienie symulacji konwekcji naturalnej w modelowym pomieszczeniu. Podczas takich symulacji wygodnie jest skorzystać z aproksymacji Bussinesqa. Jest to uproszczenie, która pozwala znacznie zwiększyć wydajność symulacji, jego opis zawarto w podrozdziale 1.2.

## 1.2. Aproksymacja Bussinesqa

Aproksymacja Bussinesqa jest uproszczeniem, według którego pomijana jest zmienność gęstości płynu z wyjątkiem warunku wyporności w równaniu Naviera-Stokesa. Podstawowym warunkiem, który musi spełniać obiekt badań, aby zastosować w stosunku do niego to uproszczenie, jest niewielkie zróżnicowanie temperatury [13]. Wybrane założenia aproksymacji Bussinesqa są następujące: przepływ laminarny, ośrodek jednorodny i izotropowy, przepływający płyn jest nieodkształcalny, przez podstawę rozpatrywanego prostopadłościanu płynu o równej wysokości przepływ nie występuje [15]. Dokładniejszy opis równań przepływu wyprowadzonych z uwzględnieniem aproksymacji Bussinesqa jest zawarty w pracy Strzeleckiego [15]. Istotnym atutem metody Bussinesqa jest znaczne uproszczenie obliczeń przy wprowadzaniu tylko niewielkich niedokładności.

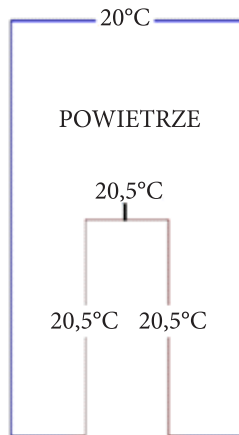
## 2. Opis przeprowadzonego doświadczenia

Rozpatrywany obiekt (pomieszczenie) różni się od przypadku dla konwekcji Rayleigha-Benarda — ma bardziej skomplikowany kształt przedstawiony na rysunku 1. Omawiane pomieszczenie miało kształt cylindryczny o wysokości 250 cm i średnicy

140 cm, z centrycznie u dołu umieszczonym cylindrycznym wycięciem o wymiarach 130 cm wysokości i 50 cm średnicy symbolizującym cieplejszy obiekt. Ze względu na osiową symetryczność pomieszczenia symulacje przeprowadzono jako płaskie, a schemat rozpatrywanego pomieszczenia wraz z wymiarami przedstawiono na rysunku 1. Zjawisko konwekcji następuje w wyniku zróżnicowania temperatur pomiędzy krawędziami obiektu ( $20,5^{\circ}\text{C}$ ) a sufitem i krawędziami pomieszczenia ( $20^{\circ}\text{C}$ ). Pomieszczenie wypełnione jest powietrzem. Przeprowadzone symulacje uwzględniają jedynie konwekcję, takie przybliżenie jest dopuszczalne dla początkowej fazy ogrzewania, podczas której udział konwekcji w wymianie ciepła jest wysoki i możliwy do wyodrębnienia.

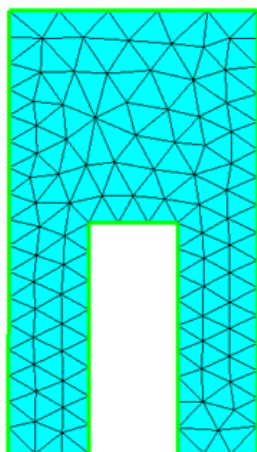
Na potrzeby symulacji na geometrię naniesiono siatkę z wykorzystaniem oprogramowania Netgen 5.3, którą przedstawiono na rysunku 2. Siatka ma dwa wymiary, posiada 206 elementów powierzchniowych, 136 węzłów, 341 krawędzi. Została wykonana jako bardzo dokładna w opcjach programu.

Natomiast same symulacje przeprowadzone zostały w środowisku Elmer 8.1 z wykorzystaniem solverów Heat Equation oraz Navier-Stokes Equation [20].



Rys. 1. Schemat modelowego pomieszczenia z oznaczonymi warunkami brzegowymi

Podstawowe parametry symulacji to: 200 kroków symulacji każdy po 2 sekundy, maksymalna liczba iteracji dla stanu ustalonego 20, natomiast dla stanu nieustalonego 1, aktywne solwery Heat Equation oraz Navier-Stokes Equation, obiekt wypełniony powietrzem, aproksymacja Bussinesq'a, warunki początkowe:  $293^{\circ}\text{C}$  oraz prędkość w kierunku  $x$  na poziomie  $10^{-9}$  m/s, warunki brzegowe: prędkości zerowe, natomiast temperatury zgodne z rysunkiem 1 (temperatura  $20,5^{\circ}\text{C}$  jedynie na zaznaczonej górnej krawędzi komory).

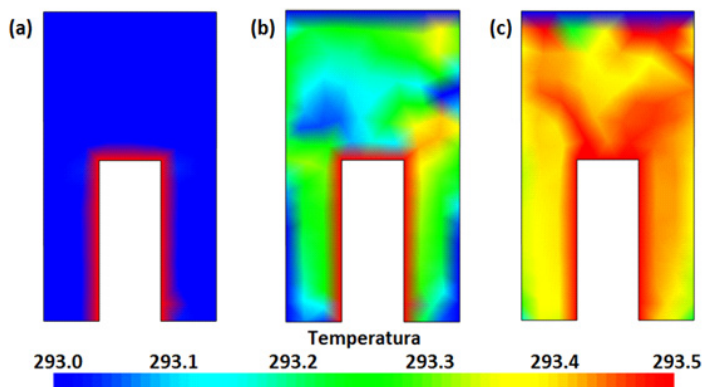


Rys. 2. Siatka wygenerowana z wykorzystaniem oprogramowania Netgen

### 3. Wyniki symulacji

W wyniku przeprowadzonych symulacji uzyskano przebieg zmian temperatury w czasie 400 sekund w rozpatrywanym pomieszczeniu. Na rysunku 3 zaprezentowano rozkłady temperatury w pomieszczeniu po zróżnicowanych czasach 0, 50 i 200 sekund.

Przebieg zmian temperatury w pomieszczeniu w trakcie symulacji wskazywał na stopniowe mieszanie się warstw powietrza. Szczególnie w warstwie powyżej cieplejszego obiektu (a poniżej górnej krawędzi pomieszczenia)



Rys. 3. Rozkład temperatury w modelowym pomieszczeniu po: a) 1 kroku (2 sekundach); b) 50 krokach (100 sekundach); c) 200 krokach (400 sekundach), symulacja w Elmer, prezentacja wyników ElmerVTK

obserwowano charakterystyczne wiry typowe dla konwekcji Rayleigha-Benarda. Jednak w uzyskanych rozkładach widoczne są komórki powierzchni. Jest to efekt zbyt dużej ich wielkości, co wpływało na uzyskiwane wyniki. Jednak pomimo to przebieg zmian temperatury ma zadowalający charakter.

#### 4. Wnioski

Jak zauważono podczas analizy wyników, uzyskane zmiany rozkładów temperatury w pomieszczeniu mają przebieg zbliżony do rzeczywistego. Wskazuje to na skuteczność narzędzia, jakim jest Elmer, do symulacji konwekcji naturalnej. Jednocześnie obserwowano wpływ zbyt dużych komórek powierzchni na uzyskiwane wyniki. Dlatego w dalszych pracach planowane jest korzystanie z gęstszych siatek.

Warto zauważyć, że konwekcja nie jest jedyną drogą odprowadzania ciepła z cieplejszych krawędzi — inne sposoby to promieniowanie, przewodzenie i parowanie. Udział poszczególnych dróg jest zależny od charakteru stykających się ośrodków, pamiętać należy, że zawsze występuje również oddawanie ciepła poza rozpatrywany układ. Dlatego, aby przeprowadzić dokładniejsze — w wyższym stopniu zgodne z rzeczywistością symulacje, należy uwzględnić wymienione czynniki i inne drogi odprowadzania ciepła. Dzięki temu możliwe będzie uzyskanie kompleksowego obrazu wpływu obiektu wewnątrz pomieszczenia na rozkład temperatury w jego wnętrzu. Przeprowadzone oraz planowane analizy są istotne w perspektywie przyszłych prac, których celem jest symulowanie wpływu osób na warunki panujące w pomieszczeniach maszynowych, w szczególności w schronach cywilnych. Jest to ważne z powodu braku wyników badań w tym zakresie, a także ze względu na możliwość wykorzystania efektów takich prac podczas tworzenia nowych wytycznych dla modernizacji lub budowy schronów cywilnych.

Praca powstała w ramach RMN/799/2016.

Artykuł opracowany na podstawie referatu wygłoszonego na XXX Międzynarodowej Konferencji Naukowo-Technicznej „Ekomilitaris 2016”, Zakopane, 13-16.09.2016 r.

Artykuł wpłynął do redakcji 12.10.2016 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 7.09.2017 r.

#### LITERATURA

- [1] BENARD H., *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent*, Ann Chim. Phys., v. 23, 1901.
- [2] RAYLEIGH J.W., *On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side*, Phil. Mag., v. 32, 1916.
- [3] OOSTHUIZEN P.H., NAYLOR D., *An introduction to convective heat transfer analysis*, McGraw-Hill Science, Engineering & Mathematics, 1999.

- [4] JEFFREYS H., *Some Cases of Instability in Fluid Motion*, Proceedings of the Royal Society of London Series A Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, vol. 118, no. 779, 1928, pp. 195-208.
- [5] PELLEW A. and SOUTHWELL R.V., *On Maintained Convective Motion in a Fluid Heated from below*, Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical, vol. 176, no. 966, 1940, pp. 312-343.
- [6] DROPKIN D. and SOMERSCALES E., *Heat transfer by natural convection in liquids confined by two parallel plates which are inclined at various angles with respect to the horizontal*, Journal of Heat Transfer, vol. 87, 1965, p. 77.
- [7] SOMERSCALES E.F.C. and DROPKIN D., *Experimental investigation of the temperature distribution in a horizontal layer of fluid heated from below*, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 9, no. 11, 1966, pp. 1189-1204.
- [8] BUSSE F.H., *On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below*, Journal of Mathematical Physics, vol. 46, 1967, pp. 140-150.
- [9] KRISHNAMURTI R., *On the transition to turbulent convection. Part 1. The transition from two- to three-dimensional flow*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 42, no. 02, 1970, p. 295.
- [10] BEJAN A., *Convection Heat Transfer*, vol. 3, John Wiley and Sons, 2004, p. 512.
- [11] DRAZIN P.G. and REID W.H., *Hydrodynamic Stability*, vol. 49, no. 2, Cambridge University Press, 1981, p. 467.
- [12] DEARDORFF J.W., *A Numerical Study of Two-Dimensional Parallel-Plate Convection*, Journal of the Atmospheric Sciences, vol. 21, no. 4, Jul. 1964, pp. 419-438.
- [13] TRITTON D.J., *Physical fluid dynamics*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] <http://winntbg.bg.agh.edu.pl/rozprawy2/10608/full10608.pdf>, dostęp 01.02.2017 r.
- [15] <http://www.strzelecki.net.pl/media/pliki/mppop/Wyklad%20V.pdf>, dostęp 01.02.2017 r.
- [16] <http://www.strek.strefa.pl/students/mes/mgr040630-jopek.pdf>, dostęp 01.02.2017 r.
- [17] SZARGUT J. (red.), *Modelowanie numeryczne pól temperatury*, WNT, 1992.
- [18] WIŚNIEWSKI S., WIŚNIEWSKI S.W., *Wymiana ciepła*, WNT, 2009.
- [19] TALER J., DUDA P., *Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła*, WNT, 2003.
- [20] <https://www.csc.fi/web/elmer>, dostęp 01.02.2017 r.
- [21] PETELA R., *Przepływ ciepła*, PWN, 1983.

W. RADZIKOWSKA-JUŚ, S. OWCZAREK

### Natural convection in a model chamber with the Boussinesq approximation utilization

**Abstract.** The paper presents numerical analysis of heat transfer inside a model chamber in time after entering an object of elevated temperature therein. As a result of the temperature difference between the object and the environment in the room, natural convection has occurred. Numerical simulations were performed using ELMER software based on the Finite Element Method. In order to reduce the complexity of the simulation, the Boussinesq approximation was used. The relevant case is similar to Rayleigh-Benard convection, which was starting point to the conducted analysis.

**Keywords:** temperature distribution in the model room, Rayleigh-Benard convection, Boussinesq approximation

**DOI:** 10.5604/01.3001.0010.5392